EL COMPÁS DE PROPORCIÓN, COMPÁS GEOMÉTRICO Y MILITAR O PANTÓMETRA

Juan Navarro Loidi
Instituto de Bachillerato a Distancia de Guipúzcoa - Gipuzkoako Urrutiko Batxilergoko Institutua

Palabras clave: *compás de proporción*, *instrumentos matemáticos*, *proporción geométrica*.

The proportional compass, geometric and military compass or Pantometra

Summary: *This comunication studies the proportional compass and shows some posible applications of this mathematical instrument to a secondary school class of mathematics. It is proposed the use of the scales separately to avoid the difficulties of the compasses.*

Key words: *proportional compass*, *mathematical instruments*, *geometrical proportion*.

El compás de proporción es una especie de «calculadora analógica» que se utilizó bastante durante los siglos XVII y XVIII. El nombre le viene de que los cálculos que se hacían con él están basados en la proporcionalidad entre segmentos. Pero también se le ha llamado *compás geométrico y militar*, porque era utilizado principalmente por militares, o *pantómetra,* por su versatilidad.

Su invención fue el fruto de un largo proceso (Daumas, 1953: 33-39), pero se suele considerar que su inventor fue Galileo Galilei que diseñó y vendió un *compasso geometrico e militare* a finales del siglo XVI, y publicó un libro en el que se explicaba su uso (Galilei, 1606). A España, tal vez llegara antes el *compás pantómetro* propuesto por el belga Michel Coignet (1549-1622), y en otros países se pueden encontrar también otros instrumentos semejantes propuestos en fechas anteriores, pero Galileo fue quien consiguió que el aparato se popularizara.

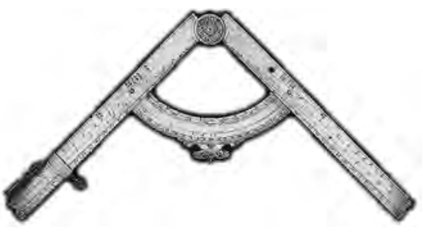

FIGURA 1. Compás de proporción de Galileo.

En qué consiste una pantómetra

La pantómetra es un aparato que tiene la forma de un compás con dos láminas planas como piernas. Estas láminas están unidas entre sí por una bisagra que permite abrirlas o cerrarlas. Sobre cada lámina están grabadas varias escalas. Las escalas son las mismas en las dos piernas de una misma cara del compás y están dispuestas simétricamente. Además las líneas están grabadas de tal forma que todas convergen en el eje de la bisagra.

Este instrumento se puede usar para hacer diversas operaciones. En las más corrientes se trata de, conocida una cierta magnitud que se representa mediante un segmento, hallar otra que guarde cierta proporción con la dada. Para obtenerla se comienza tomando las dos escalas del compás que correspondan a la magnitud con la que se quiera operar. Cada una estará en una pierna diferente. Se abre el aparato hasta que el segmento conocido se ajuste entre dos marcas iguales de esas dos escalas, dos unos, por ejemplo. Si no se mueven las piernas, la relación entre la longitud del segmento conocido y la de otro que esté entre otro par de puntos iguales será la misma que la que haya entre las longitudes que determinen los puntos correspondientes en cada escala. Es decir, si el segmento conocido se coloca entre dos puntos que distan 1 de la bisagra, el segmento que esté entre dos marcas de las escalas que disten 3 de la bisagra será tres veces mayor que él. Esto se deduce de que el triángulo que tiene por vértices la bisagra y los dos puntos entre los que está el segmento conocido, y el triángulo de vértices la bisagra y los dos puntos entre los que está el nuevo segmento son semejantes, ya que los dos lados que van según las escalas son proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es común.

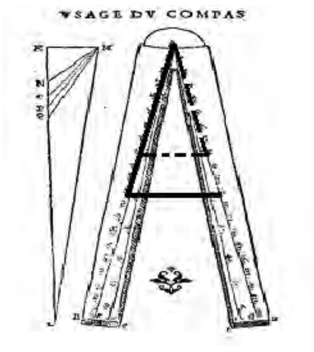

FIGURA 2

Con este instrumento no se hacen cálculos numéricos. Los datos y los resultados son segmentos. Históricamente esas longitudes se trasladaban con un compás de puntas finas. Si se quería conocer el valor numérico de la solución se llevaba la abertura obtenida a una regla graduada, que en aquel tiempo se llamaba *escala de partes iguales* o *petipie*.

La interpretación geométrica o física de los resultados obtenidos dependía de las escalas utilizadas. Las líneas que estaban presentes variaban de un compás a otro porque los fabricantes adaptaban las pantómetras a las necesidades de la profesión a la que querían vender el aparato. Las líneas más corrientes fueron la de partes iguales, la de superficies, la de volúmenes, la de cuerdas, la de metales, la de polígonos, las de senos y tangentes y la de pesos de balas de cañón.

Algunos compases de proporción tenían algunas piezas más. Por ejemplo, el propuesto por Galileo tenía un cuadrante o trasportador para medir ángulos, que podía servir en topografía. Aunque la pantómetra o compás de proporción era fundamentalmente un aparato de cálculo, no de medida, tuvo muchas variantes y algunas, como la de Galileo, pudieron utilizarse también con ese fin. En particular, este aparato no está relacionado con un tipo de teodolito azimutal, que se denomina también *pantómetra*. Tampoco lo está con el compás de reducción, que sirve para copiar dibujos a escala y que algunos denominan *compás de proporción*.

El compás o sector de Gunter (1581-1626) sí que se parece a la pantómetra, pero no se le suele considerar una variante del compás geométrico y militar. Se diferencia por sus líneas ya que solía tener unas escalas trigonométricas y logarítmicas que en las pantómetras no eran corrientes. Pero si se han considerado aparatos diferentes ha sido, principalmente, porque estaban dirigidos a públicos distintos. La pantómetra la utilizaron en tierra, militares, agrimensores o arquitectos, mientras que el compás de Gunter lo usaron en el mar los navegantes.

El éxito del compás de proporción se debió a que desde el Renacimiento muchos profesionales se vieron en la obligación de hacer unos cálculos para los que no estaban muy bien preparados. La pantómetra les ofreció a estos técnicos una forma rápida, pero no muy precisa, para llegar al resultado buscado. Como en aquella época no se solía necesitar mucha exactitud para levantar fortificaciones, para medir las tierras o para otras tareas similares, esa cuestión no era un obstáculo importante. Pero con el paso del tiempo la situación fue cambiando y al llegar al siglo XIX el compás de proporción dejó de utilizarse porque su precisión comenzó a ser insuficiente y, sobre todo, porque los profesionales que la utilizaban comenzaron a estar mejor formados y a ser capaces de realizar cálculos más complicados. Sin embargo, otros aparatos del mismo tipo se han seguido utilizando hasta épocas recientes. Por ejemplo, las reglas de cálculo han durado hasta finales del siglo XX, y funcionaban también a base de operaciones entre segmentos. Pero en ese caso las matemáticas necesarias son algo más sofisticadas pues los cálculos se basan en unas escalas logarítmicas.

Si nos limitáramos a la evolución de este instrumento en España, la historia no cambiaría mucho. Durante los siglos XVII y XVIII se proponía su uso en muchos tratados militares o libros de matemáticas, aunque eran pocos los textos en los que se explicaba cómo se utilizaban y muy raros los que exponían cómo hacer para fabricarlos. A finales del XVIII todavía se seguía proponiendo la utilización del compás de proporción en varios textos. Benet Baïls, por ejemplo, describe una pantómetra muy completa en sus *Principios* (1776, vol. I: 384-409). Pero en los libros de matemáticas del siglo XIX el compás de proporción ya no figura entre los instrumentos matemáticos propuestos.

Lo característico de su evolución en España fue que su fabricación fue prácticamente inexistente. Los compases que se usaban en la península Ibérica venían de Flandes, Italia, Francia o Inglaterra. Varios autores, como Firrufino (*El perfecto artillero*, 1642), Zaragoza (*Fábrica y uso de varios instrumentos mathematicos*, 1675), Fernández de Medrano (*El ingeniero*, 1687) o el benedictino gallego Martín Sarmiento propusieron nuevos modelos más o menos útiles y originales de este instrumento. Pero sólo el jesuita Zaragoza lo fabricó. Su compás tiene por una cara una pantómetra militar, para utilizarla en la fortificación, y por la otra un compás harmónico para emplearlo en la música. Actualmente está expuesta en el Museo Nacional de Ciencia y Tecnología de Madrid.

La regla de proporción de Fernández de Medrano

Los militares del siglo XVII no necesitaban conocer muchas matemáticas para valerse del compás de proporción. Tampoco se necesitan saber ahora para entender su funcionamiento. Por esa razón se podría utilizar en clase para introducir determinados temas, o para mostrar la interrelación entre las matemáticas y las técnicas, o, sencillamente, para presentar a los alumnos unas matemáticas más humanizadas que evolucionan con el tiempo. Como la pantómetra se basa en la proporcionalidad de magnitudes y en la semejanza de figuras, se podría introducir como aplicación en las explicaciones de esos temas, que normalmente se imparten en segundo de ESO. También se puede introducir en otras materias posteriores cuando se emplea de alguna forma la proporcionalidad directa en los cálculos.

Pero referirse al compás de proporción en clase sin tener una reproducción delante resulta demasiado abstracto. Para fabricarlo se necesita utilizar una materia resistente, porque con el uso la bisagra que une las dos piernas del compás tiende a ceder y a tomar holgura. Pero no es fácil grabar las escalas en los dos lados si el material es duro. Por otra parte, es difícil encontrar ejemplares originales de este instrumento en los museos de la Península. Para evitar esos inconvenientes se puede dejar de lado la forma física del compás de proporción y dar importancia a las escalas. Eso lo hizo ya a finales del siglo XVII el profesor de *arte militar* Fernández de Medrano que propuso utilizar una regla que tuviera grabadas las escalas que se precisaran en lugar de usar un compás. Esa presentación obliga a dibujar los triángulos necesarios en un papel, en lugar de obtenerlos utilizando las piernas del compás de proporción. Eso era una dificultad importante en el siglo XVII, porque hacía mucho más lentos los cálculos, pero no es ningún inconveniente para utilizarlo en una clase hoy en día. Además ahora no hay que grabar las escalas en una regla para tenerlas a mano. Se pueden dibujar en un papel y fotocopiarlas para que todos los alumnos las tengan. Tampoco se necesita utilizar el compás de puntas finas para trasladar las longitudes. Una regla puede servir para hacerlo, aunque se pierda autenticidad histórica.

Para ver en qué tipo de cuestiones se podrían utilizar las escalas, se van a comentar algunas de las aplicaciones que propone para su regla Fernández de Medrano en *El architecto* (1700: 439-464), comenzando por ver cómo era ese instrumento. La regla de Medrano en la primera cara tenía las siguientes líneas:

— Una escala con cuatro pulgadas de pie de París, con la última dividida en partes hasta lograr una precisión de dos décimos de doceavo de pulgada

— Una recta con las longitudes de las aristas de unos sólidos semejantes cuyos volúmenes son proporcionales a 1, 2, 3, …, 64

FIGURA 3

— Una recta con los radios de unas esferas de oro, plomo, plata, cobre, hierro y estaño de igual peso

— Un arco de círculo de sesenta grados de amplitud, dividido en seis partes de las que la última está partida en otras diez, de tal forma que cada división es un grado. Cada grado de estos está a su vez dividido en dos mitades.

La segunda cara de esta regla tenía las siguientes escalas:

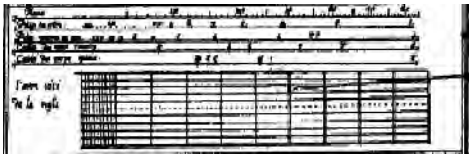

FIGURA 4

— Una con las longitudes de los lados de unas figuras semejantes que tienen sus superficies proporcionales a 1, 2, 3, etc., hasta 64.

— Otra con los lados de los polígonos regulares inscritos en un círculo (cuyo radio es igual al lado de hexágono)

— Una tercera con los lados de los polígonos que tiene la superficie igual a la de un círculo cuyo diámetro viene marcado con una D

— La siguiente escala tiene las aristas de los cinco cuerpos platónicos inscritos en una esfera, cuyo diámetro está marcado con una S

— En otra escala están las longitudes de las aristas de los cinco cuerpos anteriores cuando tienen el volumen igual al de una esfera cuyo diámetro está marcado con una S

— Una escala de tres pulgadas de un pie del Rin dividida en diez partes de las que la última está de nuevo partida en diez. En esta parte hay unas líneas trasversales con las que se obtiene una precisión de uno en mil.

En cuanto a las aplicaciones de esta regla, la primera que presenta Fernández de Medrano en su libro es la siguiente:

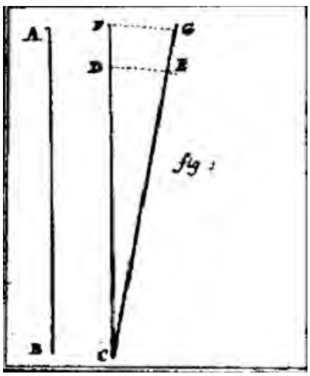

FIGURA 5

«PROPOSICIÓN I. Dividir una línea en las partes iguales que se quiere» (Medrano, 1700: 443).

No se discute esta proposición en general. Lo que se hace, en concreto, es dividir un segmento conocido AB en cinco partes.

Para ello se traza una recta CF indefinida. En la escala de partes iguales de la regla se toma un segmento de longitud múltiple de cinco, por ejemplo desde la bisagra hasta la marca 50. Con él se traza un arco con centro C. En ese arco se toma una cuerda DE de longitud igual a una quinta parte del radio, hasta la marca 10 en el ejemplo. Por el punto E se traza la recta CE. Con origen en C sobre la primera recta, se toma un segmento CF igual a AB. Usándolo como radio se traza el arco FG. La cuerda FG es la quinta parte de AB.

«PROPOSICIÓN IV. Aumentar, ó disminuir la superficie de cualquier figura en la proporción que se quiera, quedando semejante» (Medrano, 1700: 446).

Lo que se pide en concreto es dibujar un triángulo que tenga cuatro veces el área del triángulo ABC dado.

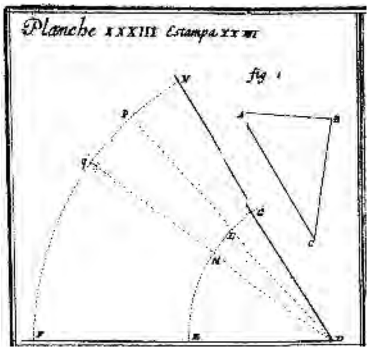

FIGURA 6

Para conocer los lados de ese triángulo se traza una recta indefinida. Con una distancia DE que corresponda, por ejemplo, al 8 en la línea de superficies, se traza un arco. Sobre dicho arco se toman las cuerdas EM, ML, LG iguales a los tres lados AB, BC, CA del triángulo dado. Desde el centro D del arco, se trazan las rectas DM, DL y DG. Con un radio DF que valga 32 en la línea de superficies se traza un nuevo arco. Los puntos de corte de ese arco con las rectas anteriores, F, Q, P, N, determinan los lados FQ, QP y PN de un triángulo semejante que tiene cuatro veces la superficie del ABC.

En esta proposición la justificación viene de la forma en que se han dibujado las marcas en la línea de superficies. En esa escala, si $DE^2 = 8K$ es $DF^2 = 32K = 4\ DE^2$. Como la razón entre los segmentos DE y DF es la misma que entre los segmentos AB y DM, BC y QP o CA y PN, el área del nuevo triángulo será cuatro veces la del primitivo porque las áreas son proporcionales al cuadro de los lados. Es decir, la justificación se basa en que la escala de superficies viene a ser una escala de raíces cuadradas.

«PROPOSICIÓN V. Dividir un circulo en las partes iguales que se quiere» (Medrano, 1700: 447).

Se quiere dividir la circunferencia AB en cinco partes iguales. Para ello se traza una línea indefinida. En la línea de los polígonos inscritos se toma el segmento CD que va del

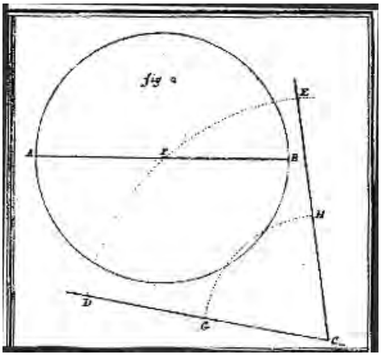

FIGURA 7

origen hasta el 6 (radio) y con él se traza un arco. En dicho arco se toma una cuerda DE igual a la longitud que va del origen hasta el número 5 de la línea de polígonos, que es igual al lado del pentágono inscrito en círculo de radio CD. Se traza la recta CE. Con AF, radio de la circunferencia AB y centro en C se traza el arco GH, que corta en H a la recta CE. La cuerda GH es el lado del pentágono inscrito en la circunferencia dada. Con esa longitud es fácil dividir la circunferencia en cinco partes iguales.

Además de estos ejercicios, en el libro de Fernández de Medrano se explica cómo dibujar un ángulo de una amplitud dada o cómo medir un ángulo, utilizando el arco para ángulos. Con la línea de polígonos iguales en superficie a un círculo se resuelve la «PROPOSICIÓN VI. Dado un circulo, hallar un lado de cualquier figura regular que le sea igual en superficie» (Medrano, 1700: 449), encontrando, en concreto, el lado de un cuadrado que tiene un área igual a la de un círculo dado. Con la línea de volúmenes y un razonamiento similar a los anteriores se muestra como hacer la «PROPOSICIÓN IX. Aumentar, ó disminuir el sólido de un cuerpo, en la proporción que se quisiere, quedando semejante» (Medrano, 1700: 453). En esta proposición se explica la forma de hallar el diámetro de una bala de tres libras si se conoce el diámetro de una bala de una libra. Con la escala de radios de esferas del mismo peso, se hace la «PROPOSICIÓN X. Dado el diámetro de una esfera de cualquier metal, hallar el diámetro de una esfera de otro que la sea igual en peso» (Medrano, 1700: 456). En este caso se supone dada una esfera AB de oro, y se halla el diámetro de otra de plata del mismo peso. También se pide hallar la masa de una esfera si se conoce la que tiene otra del mismo material pero distintas dimensiones, o encontrar el radio de una esfera que se obtiene juntando otras dos o el de una esfera hecha con el material que queda quitando a una dada la masa necesaria para formar otra también conocida.

En el libro se resuelven más de veinte proposiciones similares a las anteriores. Siempre las proposiciones se enuncian en general, pero se resuelven para un ejemplo concreto. En todos los casos los métodos utilizados se basan en las características de la escala y en la proporcionalidad entre segmentos, o si se prefiere en la semejanza de triángulos.

Las escalas que aparecen en este tratado son en general fáciles de construir. La escala de partes iguales se puede fabricar con cualquier regla. La escala de los lados de las figuras con superficies proporcionales a 1, 2, 3, 4… se obtiene tomando en una recta puntos que distan del origen longitudes proporcionales a 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2… y poniendo en dichos puntos 1, 2, 3, 4… La escala de las aristas de las figuras que tienen su volumen proporcional a 1, 2, 3 se obtiene calculando unas longitudes tales que sean proporcionales a $\sqrt[3]{n}$, con $n = 1, 2, 3\ldots$, y poniendo a esas distancias de la bisagra los números 1, 2, 3. . . Para los radios de las esferas de igual peso se buscan las densidades d de los materiales que interesen y se hallan los

radios correspondientes calculando $R = \sqrt[3]{\frac{K}{d}}$, siendo K un valor adecuado para que la escala no sea demasiado grande ni demasiado pequeña. Los lados de los polígonos inscritos en una circunferencia de radio R se obtienen calculando $2 \cdot R \cdot \text{sen}\left(\frac{180}{n}\right)$ y poniendo a esas distancias del origen el número n ($n \geq 3$), por lo que en este caso su diseño no es tan fácil. Lo mismo sucede con la línea de los lados de los polígonos regulares de área igual a la de un círculo de diámetro D. Para hallarlos se toma un área A apropiada para que las longitudes resultantes sean razonables y se calcula $l = \sqrt{\frac{4 \cdot A \cdot \text{tag}\left(\frac{180}{n}\right)}{n}}$ y $D = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}}$. Otras líneas que indica Medrano, como la de las aristas de los sólidos platónicos, o que se proponían en otros compases, como las de senos, tangentes o logaritmos, parecen demasiado complicadas para usarlas en la enseñanza secundaria obligatoria.

Bibliografía

BAILS, Benito (1776). *Principios de matemática de la Real Academia de San Fernando*. Madrid: Joaquín Ibarra. 3 v.

DAUMAS, Maurice (1953). *Les instruments scientifiques aux XVIIe et XVIIIe siècles*. París: Presses Universitaires de France.

FERNÁNDEZ DE MEDRANO, Sebastián (1687). *El ingeniero*. Bruselas: Lamberto Marchant. 2 v.

— (1700). *El architecto perfecto en el arte militar*. Bruselas: Lamberto Marchant. Reedición facsímil, 2001, Valladolid: Maxtor. Reedición en CD: Fundación Tavera, *Tratados de arquitectura, urbanismo e ingeniería*, Serie V «Temáticas para la historia de España».

FIRRUFINO, Julio César (1642). *El perfecto artillero: theorica y pratica*. S. l., s. i. Las tasas están firmadas en 1648 por lo que probablemente fue esta la fecha de publicación y no 1642 como aparece en la portada.

GALILEI, Galileo (1606). *Le operazioni del compasso geometrico e militare.* Padua.

ISTITUTO E MUSEO DI STORIA DELLA SCIENZA. Florencia, Italia. *Il compasso di Galileo* [en línea]. <http://brunelleschi.imss.fi.it/esplora/compasso/indice.html> [Consulta: 25 noviembre 2005]. Tiene explicaciones y ejemplos, además del texto del libro de Galileo.

ZARAGOZA, Josep (1675). *Fábrica y uso de varios instrumentos mathematicos*. Madrid: Antonio Francisco de Zafra.